

＜回帰分析＞

★3次の最小2乗多項式

次のデータに対して、3次の最小2乗多項式 $P(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3$ を求める。

Sheet1

x	y
0	0
0.1	0.1002
0.2	0.2013
0.3	0.3045
0.4	0.4108
0.5	0.5211
0.6	0.6367
0.7	0.7586
0.8	0.8881
0.9	1.0265
1	1.1752

(計算の準備)

- x, y を表で代入定義する。
(x, y それぞれの列を選択して代入定義するか、
1行目を選択して「列の名前」として登録する。)
- $x=Sheet1.x$ $y=Sheet1.y$
それぞれ代入定義する。
(表のデータを表の外で参照する際には表名(シート名)が必要なので、変数(配列)に置き換える)
- $n=\|x\|$ 代入定義する($\| \|$ は要素の数を返す演算)

(計算方法1)

正規方程式を作る。

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^3 y_i) \end{pmatrix}$$

正規方程式を解く。

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^3 y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0001434 \\ 1.0045726 \\ -0.0201107 \\ 0.1906954 \end{pmatrix}$$

(計算方法2)

最小自乗法で求めます。これは次の方程式で係数 $c_i(i=1\sim 4)$ を求めることです。

$$y \approx c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \quad (1)$$

$i=1..n$ $j=1..4$ それぞれ代入定義します。

$a_{ij}=0$ 配列定義:2次元配列の作成

$A=create_matrix(a)$ $Y=create_matrix(y)$ 行列の準備

$A_{ij}=x_i^{j-1}$ 代入定義により、行列に値をいれます。
(注:行列Aは計画行列と呼ばれるものです。)

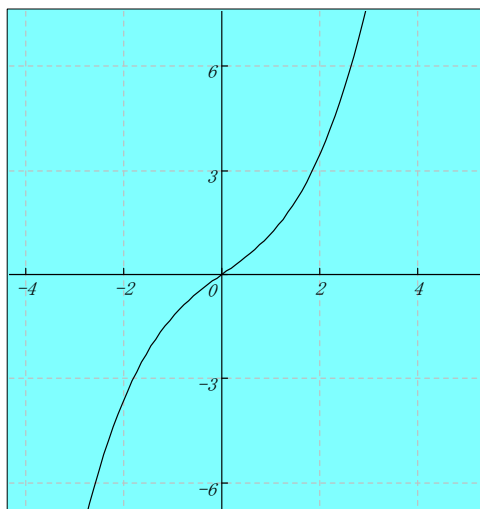
式(1)は計画行列Aを用いて、次のように表現できます。 $Y \approx Ac$

それゆえ Aの一般逆行列 A^+ を用いて、cは次のように計算されます。

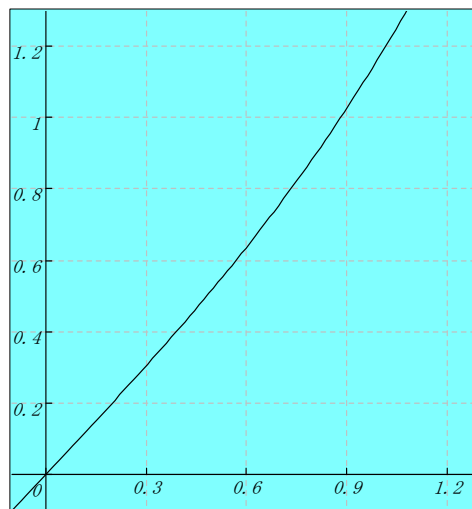
$$c=A^+Y \quad c=\begin{pmatrix} -0.0001434 \\ 1.0045726 \\ -0.0201107 \\ 0.1906954 \end{pmatrix}$$

求める式は $P(x)=-0.0001434+1.0045726x-0.0201107x^2+0.1906954x^3$

グラフにすると



データの範囲に拡大すると



{Sheet1.x,Sheet1.y}

をデータグラフにするとーー>

