

＜QR分解と連立1次方程式＞

プロフェッショナル版限定機能

QR分解を利用して、行列形式の連立1次方程式の解法を説明します。方程式の形は以下のようなものです。
この方法は近似解しか求まりません。 注: 正則行列の方程式を解くためだけであれば、LU分解法が高速です。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 10 & -3 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{方程式} \quad Ax=B$$

解法の説明

$$\{Q,R\}=QR(A) \quad \text{代入定義}$$

求まったQ,Rで元の方程式を表せば以下のようなになる。

$$QRx=B \quad \text{従って} \quad Rx=Q^{-1}B$$

$$\text{他方、Qは直交行列であるので} \quad Q^{-1}=Q^T$$

$$\text{したがって} \quad C=Q^T B \quad \text{代入定義}$$

$$C = \begin{pmatrix} -11.2003230391317 \\ 4.13569711182081 \\ -4.08652613748172 \\ 1.08389732113082 \\ 2.77816583074069 \\ -0.925223519049045 \end{pmatrix} \quad \text{計算}$$

以下の解が元の方程式の解である。

$$Rx=C$$

ここでRは上三角行列であるためこの方程式の解xはシステム関数utm_equationで求まる。

$$x=utm_equation(R,C) \quad \text{代入定義}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5.34834180585809 \\ 4.37061244250781 \\ -8.09174534011126 \\ -6.19075284434755 \\ -2.60663277656738 \\ 9.68482207697883 \end{pmatrix} \quad \text{計算}$$

検算

$$Ax - B = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{-14} \\ 2 \times 10^{-14} \\ -1.1 \times 10^{-13} \\ 2 \times 10^{-14} \\ -3 \times 10^{-14} \\ -1.1 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

ここで参考のためにQ,Rの値を6桁精度で表示しておきます。

$$Q = \begin{pmatrix} -0.070888 & -0.033098 & -0.115586 & 0.052079 & 0.563628 & 0.812484 \\ -0.708881 & -0.639722 & 0.123350 & -0.206321 & 0.111356 & -0.134385 \\ -0.212664 & 0.415276 & -0.559253 & -0.528656 & 0.334639 & -0.279454 \\ -0.141776 & 0.345460 & 0.558589 & 0.291408 & 0.587132 & -0.344808 \\ -0.141776 & 0.345460 & 0.558589 & -0.607810 & -0.281877 & 0.315669 \\ -0.637993 & 0.422517 & -0.186057 & 0.469990 & -0.365735 & 0.158667 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -14.106736 & -4.536840 & -9.499008 & -5.174833 & -3.119077 & -3.402630 \\ 0 & 9.716845 & 2.151369 & 6.022800 & 5.027274 & 3.042429 \\ 0 & 0 & 5.209650 & -1.557311 & 2.026304 & 3.480657 \\ 0 & 0 & 0 & -6.672464 & 1.238431 & -3.819951 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.075145 & 2.729398 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.095533 \end{pmatrix}$$