LU分解と連立1次方程式　プロフェッショナル版限定機能

LU分解を利用して連立1次方程式を解きます。
(ここで取り上げる例題は、小規模な連立1次方程式ですので、実際は方程式メニューで解くのが適切です。LU分解法が必要になるのは、大規模な連立1次方程式の時ですが、説明のため簡単な例を使いました。)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5&1\\10&-3&6&1&0&2\\3&5&0&8&4&3\\2&4&5&0&9&4\\2&4&5&6&0&5\\9&7&6&3&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2\\5\\7\\3\\-1\\9\end{pmatrix}$$

方程式　Ax=B　を解く

{p,L,U}=LU(A)　代入定義

この代入で求まったそれぞれの値を以下に表示します。

p={{3, 4}, {5, 6}}

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\10&1&0&0&0&0\\2&-1.3333333&1&0&0&0\\3&-1.6666667&0.76923077&1&0&0\\9&-2.3333333&1.5384615&0.37982196&1&0\\2&-1.3333333&1&0.69436202&-0.50263736&1\end{pmatrix}$$

表示精度は6桁

Lはこのように正規化された下三角行列になっています。

$$U=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5&1\\0&-3&6&1&-50&-8\\0&0&13&1.3333333&-67.666667&-8.6666667\\0&0&0&8.6410256&-42.282051&-6.6666667\\0&0&0&0&-40.504451&-11.801187\\0&0&0&0&0&-0.30263736\end{pmatrix}$$

表示精度は6桁

Uはこのように上三角行列になっています。

pがΦでないため、Bの要素を交換する必要があります。

C=matrix_row_change(B,3,4)　代入定義

C=matrix_row_change(C,5,6)　代入定義

これによりBの行を交換したCは右のようになります。

$$C=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\7\\9\\-1\end{pmatrix}$$

従って解くべき方程式は以下のようになります。

LUx=C

xを求めるための以下のような効率的手順が知られています。

(1) この方程式はLが正規化された下三角行列のため、特別な関数で求めることができます。

Ly=C

D=nltm_equation(L,C)　　　　代入定義

nltm_equation関数は正規下三角行列の方程式専用の関数です。

$$D=\begin{pmatrix} 2 \\ -15 \\ -21 \\ -7.84615384615394 \\ -8.71216617210679 \\ -2.93098901098893 \end{pmatrix}$$

注釈

$y=L^{-1}C$ の計算式で簡単に求めることができますが、この方法は次元の3乗のオーダーでの計算になります。

(2) 以下の方程式の解が求める解となります。

Ux=D

$$\mathrm{utm\_equation}(U,D)=\begin{pmatrix} 5.34834180585807 \\ 4.37061244250779 \\ -8.09174534011121 \\ -6.19075284434751 \\ -2.60663277656736 \\ 9.68482207697872 \end{pmatrix}$$

注釈

$x=U^{-1}D$ の計算式で簡単に求めることができますが、この方法は次元の3乗のオーダーでの計算になります。

utm_equation関数は上三角行列の方程式専用の関数です。

これが解になります。

(3) 解の検証

$$A\begin{pmatrix} 5.34834180585807 \\ 4.37061244250779 \\ -8.09174534011121 \\ -6.19075284434751 \\ -2.60663277656736 \\ 9.68482207697872 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.99999999999999 \\ 5 \\ 6.9999999999998 \\ 2.99999999999989 \\ -1.00000000000021 \\ 9.00000000000001 \end{pmatrix}$$

計算

確かに誤差の範囲で元の方程式を満たしています。