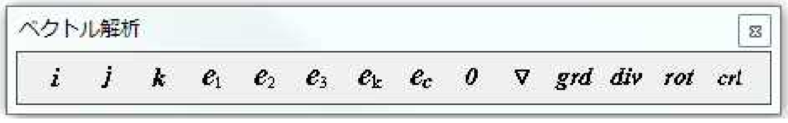
ベクトル解析機能

カルキングは、直交座標系、極座標系、円柱座標系を扱います。

基底単位ベクトル

基底単位ベクトルにはいくつかの表現方法があります。
カルキングでは、ベクトル解析ツールバーでこれらを使い分けることができます。



例　2次元、3次元直交座標系

5i + 3j -2k

$5\mathbf{e}_1 +3\mathbf{e}_2 -2\mathbf{e}_3$　　この表記は、2次元、3次元のみに制限されます。

例　多次元直交座標系、極座標系、円柱座標系

$5\mathbf{e}_1 +3\mathbf{e}_2 -2\mathbf{e}_3 +7\mathbf{e}_4 -4\mathbf{e}_5$　　$\mathbf{e}_4$,$\mathbf{e}_5$等は、ベクトル解析ツールバーの$\mathbf{e}_k$を利用します。

$4\mathbf{e}_r +0.5\mathbf{e}_\theta +0.3\mathbf{e}_\phi$　　これらの**e**はすべてベクトル解析ツールバーの$\mathbf{e}_c$を利用します。

$4\mathbf{e}_\rho +0.5\mathbf{e}_\phi +0.3\mathbf{e}_\theta$　　これらの**e**はすべてベクトル解析ツールバーの$\mathbf{e}_c$を利用します。

ベクトル解析で使われる変数名の入力方法

CTRL+SMPLX martini文字盤クリック
この方法は、ノーマル書体で数式を作成中に
太文字を入力しても、書体モードが変化しません。

スカラー変数、ベクトル変数が混在したときの計算例

3次元空間の点(5,2,4)を通る球の体積を求めよ。ただし球の中心は原点にあるとする。

$\boldsymbol{r}$=(5,2,4)	代入定義	
r=|$\boldsymbol{r}$|	代入定義	半径を求める。
$\dfrac{4\pi r^3}{3}$=1264.4667	計算	球の体積を求める。

ベクトル計算の答の表示の変更方法

＝記号の直後に、特徴を表す記号を記入して計算します。

$\boldsymbol{r}$=(5,2,4)	代入定義
$\boldsymbol{r}$=i	単位ベクトルの i を＝の直後に記入して、計算を実行すると、次の様になる。
$\boldsymbol{r}$=5i+2j+4k	計算
$\boldsymbol{r}=\mathbf{e}_1$	単位ベクトルの e を＝の直後に記入して、計算を実行すると、次の様になる。
$\boldsymbol{r}=5\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3$	計算
$\boldsymbol{r}$=5i+2j+4k	代入定義
$\boldsymbol{r}$=(?)	可変カッコを＝の直後に記入して、計算を実行すると、次の様になる。
$\boldsymbol{r}$=(5, 2, 4)	計算

異なる座標系間の答え表示の変換　　(r,θ,ϕ)系からの変換

$(r, \theta_{x,y,z}, \phi_{x,y})$　　座標系単位定義

$\alpha=4\mathbf{e}_r+0.5\mathbf{e}_\theta+0.3\mathbf{e}_\phi$　　代入定義

$\alpha=\mathbf{i}$　　単位ベクトルの i を＝の直後に記入して、計算を実行する。

$\alpha=1.8320508\mathbf{i}+0.56671974\mathbf{j}+3.5103302\mathbf{k}$　　計算

$|\alpha|=4$　　計算

ベクトル解析用の演算子

プロフェッショナル版限定機能

「ベクトル解析」ツールバーから入力します。

最も汎用性の高い演算子は∇演算子です。

grad、div、rot、curl は∇演算子を用いて定義されています。なお rot と curl は同じ機能です。

直交座標系での∇演算子の計算

● f(x,y,z) は3次元空間で定義されているスカラー関数とします。

この f(x,y,z) に対して ∇ を適用した ∇f(x,y,z) は次のように定義されます。

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

または基底ベクトルを使って

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

計算例1　f(x,y,z)関数の具体的内容が分かっているとき

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$　　関数定義

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i}+\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j}+\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$$

代数計算

$$\nabla f=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i}+\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j}+\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$$

代数計算

$\nabla\cdot(\nabla f)=0$　　$\Delta(f)=0$　　代数計算

計算例2　f(x,y,z)関数の具体的内容が分かっていないとき

$f(x,y,z)=\varnothing$　　関数定義

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}$$　　代数計算

関数の引数を省略して計算することもできます。

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\qquad \mathrm{grad}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$　　代数計算

$$\Delta(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$　　代数計算

● $\boldsymbol{F}(x,y,z)$は3次元空間で定義されている以下のようなベクトル関数とします。

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\,\mathbf{i}+F_2(x,y,z)\,\mathbf{j}+F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

計算例3

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{2e^{-z^2}}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{3e^{-z^2}}{x^2+y^2}\mathbf{j}+\frac{1}{z}\mathbf{k}$$ 関数定義

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{-4e^{-z^2}xz^2-6e^{-z^2}yz^2-x^4-2x^2y^2-y^4}{x^4z^2+2x^2y^2z^2+y^4z^2}$$ 代数計算

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{F})=\frac{-4e^{-z^2}xz^2-6e^{-z^2}yz^2-x^4-2x^2y^2-y^4}{x^4z^2+2x^2y^2z^2+y^4z^2}$$ 代数計算

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{6e^{-z^2}z}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{-4e^{-z^2}z}{x^2+y^2}\mathbf{j}+\frac{-6e^{-z^2}x+4e^{-z^2}y}{x^4+2x^2y^2+y^4}\mathbf{k}$$ 代数計算

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{F})=\frac{6e^{-z^2}z}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{-4e^{-z^2}z}{x^2+y^2}\mathbf{j}+\frac{-6e^{-z^2}x+4e^{-z^2}y}{x^4+2x^2y^2+y^4}\mathbf{k}$$ 代数計算

極座標系、円柱座標系での▽演算子の計算

円柱座標系での計算は、円柱座標系計算モードに切り替えるため座標系単位定義が必須です。

(r,θ,z) 　　(r,θ,z)を選択して、「実行」－「座標系単位定義」

また、円柱座標系計算モードの時に、▽演算子の極座標系計算を実行するときには、
極座標系計算モードに切り替えるために、次の座標系単位定義が必要です。

$(r,\theta_{x,y,z},\phi_{x,y})$ 　　$(r,\theta_{x,y,z},\phi_{x,y})$を選択して、「実行」－「座標系単位定義」

注意：解説書により、θ、ϕの角度の定義が逆のことがありますが、
カルキングはこれを使い分けることができます。

極座標系での▽計算

$(r,\theta_{x,y,z},\phi_{x,y})$ 座標系単位定義

$g(r,\theta,\phi)=\varnothing$ 関数定義

$$\nabla g=\frac{\partial g}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$ 代数計算

$G_r(r,\theta,\phi)=\varnothing$ 関数定義

$G_\theta(r,\theta,\phi)=\varnothing$ 関数定義

$G_\phi(r,\theta,\phi)=\varnothing$ 関数定義

$\boldsymbol{G}(r,\theta,\phi)=G_r\mathbf{e}_r+G_\theta\mathbf{e}_\theta+G_\phi\mathbf{e}_\phi$ 関数定義

内積計算

$$\nabla\cdot\boldsymbol{G}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(r\frac{\partial G_r}{\partial r}\sin\theta+2G_r\sin\theta+G_\theta\cos\theta+\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial G_\phi}{\partial\phi}\right)$$ 代数計算

この計算式は、以下の簡潔な表現の式と等価です。

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r^2\sin\theta G_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta G_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rG_\phi)}{\partial\phi}\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\left(r\frac{\partial G_r}{\partial r}\sin\theta+2G_r\sin\theta+G_\theta\cos\theta+\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial G_\phi}{\partial\phi}\right)$$

外積計算

$$\nabla\times\boldsymbol{G}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(G_\phi\cos\theta+\frac{\partial G_\phi}{\partial\theta}\sin\theta-\frac{\partial G_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r+\frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\frac{\partial G_\phi}{\partial r}\sin\theta-G_\phi\sin\theta+\frac{\partial G_r}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial G_\theta}{\partial r}+G_\theta-\frac{\partial G_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\phi$$

代数計算

$\boldsymbol{G}(r,\theta,\phi)$ を以下のように定義することもできます。

$\boldsymbol{G}(r,\theta,\phi) = G_r(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_r + G_\theta(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\theta + G_\phi(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\phi$ 　　関数定義

この場合の計算結果の表現は以下のようになります。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{G}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(r\frac{\partial G_r}{\partial r}(r,\theta,\phi)\sin\theta+2G_r(r,\theta,\phi)\sin\theta+G_\theta(r,\theta,\phi)\cos\theta+\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta}(r,\theta,\phi)\sin\theta+\frac{\partial G_\phi}{\partial\phi}(r,\theta,\phi)\right)$$
代数計算

$$\nabla\times\boldsymbol{G}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(G_\phi(r,\theta,\phi)\cos\theta+\frac{\partial G_\phi}{\partial\theta}(r,\theta,\phi)\sin\theta-\frac{\partial G_\theta}{\partial\phi}(r,\theta,\phi)\right)\mathbf{e}_r+\frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\frac{\partial G_\phi}{\partial r}(r,\theta,\phi)\sin\theta-G_\phi(r,\theta,\phi)\sin\theta+\frac{\partial G_r}{\partial\phi}(r,\theta,\phi)\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial G_\theta}{\partial r}(r,\theta,\phi)+G_\theta(r,\theta,\phi)-\frac{\partial G_r}{\partial\theta}(r,\theta,\phi)\right)\mathbf{e}_\phi$$
代数計算

具体的計算例

$\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi)=r\mathbf{e}_r$ 　　関数定義

$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{r^2}\mathbf{e}_r$ 　　$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\right)=0$ 　　$\nabla\cdot\left(\frac{-1}{r^2}\mathbf{e}_r\right)=0$ 　　$\Delta\frac{1}{r}=0$ 　　$\nabla(\ln r)=\frac{1}{r}\mathbf{e}_r$
代数計算

円柱座標系での∇計算

(r,θ,z) 　　座標系単位定義

$\boldsymbol{h}(r,\theta,z)=\varnothing$ 　　関数定義

$\nabla\boldsymbol{h}=\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial z}\mathbf{e}_z$ 　　代数計算

$H_r(r,\theta,z)=\varnothing$ 　　関数定義
$H_\theta(r,\theta,z)=\varnothing$ 　　関数定義
$H_z(r,\theta,z)=\varnothing$ 　　関数定義
$\boldsymbol{H}(r,\theta,z) = H_r\mathbf{e}_r + H_\theta\mathbf{e}_\theta + H_z\mathbf{e}_z$ 　　関数定義

$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial H_r}{\partial r}+r\frac{\partial H_z}{\partial z}+H_r+\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta}\right)$ 　　代数計算

$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r}\left(-r\frac{\partial H_\theta}{\partial z}+\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_r+\left(-\frac{\partial H_z}{\partial r}+\frac{\partial H_r}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial H_\theta}{\partial r}+H_\theta-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z$ 　　代数計算

$h(r,\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$ 　　関数定義

$\nabla\cdot(\nabla h)=0$ 　　$\Delta(h)=0$ 　　代数計算

$f(r,\theta,z)=\frac{z}{r^2}$ 　　関数定義

$\nabla f=\frac{-2z}{r^3}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_z$ 　　代数計算