＜楕円積分の応用＞

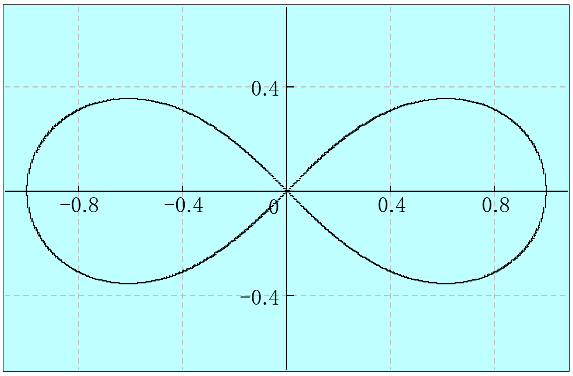
プロフェッショナル版限定機能

ベルヌーイのレムニスケートの周の長さを求める

極座標　$r^2=\cos 2\theta$　(1)

x−y座標系　$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

この式の陰関数グラフが右のグラフになります。



ベルヌーイのレムニスケートの周長　$\int\sqrt{dr^2+(rd\theta)^2}=\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr$　(2)

$r^2=\cos 2\theta$　θ をｒの関数とみなし、両辺を θ で微分する。

このために　$\theta(r)=\varnothing$　関数定義

$2r=-2\sin 2\theta\frac{d\theta}{dr}$

両辺を二乗して共通式を削除すると　$r^4=\sin^2 2\theta r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2$　したがって　$r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2=\frac{r^4}{\sin^2 2\theta}$

(1)式の両辺を二乗すると　$r^4=\cos^2 2\theta$

したがって　$r^4=1-\sin^2 2\theta$　$\sin^2 2\theta=1-r^4$

(2)式は次のように変形できる。

$$\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{\sin^2 2\theta}}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{1-r^4}}dr$$

よって

$$\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{1-r^4}}dr=\int\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$$

レムニスケートの周長　$L=\int\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$

第一種楕円関数の定義は　$K(k)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$

したがって　$L=2K(i)=2.6220575542921$