Laplace変換入門　ラプラス変換、ラプラス逆変換の使用例

プロフェッショナル版限定機能

連立線形常微分方程式の非数値解をラプラス変換、ラプラス逆変換を使って求めます。

$y'(t)+2y(t)=e^{-t}$　　　$y(0)=3$

yを仮想関数として定義します。　$\boxed{y(t)=\varnothing}$　未知数の関数を仮想関数定義します。

微分方程式をラプラス変換します。

$\mathcal{L}\{y'(t)\}+\mathcal{L}\{2y(t)\}=\mathcal{L}\{e^{-t}\}$　　(1)

$\mathcal{L}\{y'(t)\}=\frac{d}{dt}\mathcal{L}\{y(t)\}$　　ラプラス変換と微分の可換性を使います。

$\mathcal{L}\{2y(t)\}=2\mathcal{L}\{y(t)\}$　　定数をくくりだします。

$\boxed{\mathcal{L}\{e^{-t}\}=\frac{1}{s+1}}$　　ラプラス変換を実行します。(代数計算を実行します)

以上により方程式(1)は　$\frac{d}{dt}\mathcal{L}\{y(t)\}+2\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{1}{s+1}$　　(2)

ラプラス変換の微分機能により

$\boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{L}\{y(t)\}=s\mathcal{L}\{y(t)\}-y(0)}$　　ラプラス変換の微分(代数計算を実行)

また y(0)=3　より、方程式(2)は次のようになります。

$s\mathcal{L}\{y(t)\}-3+2\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{1}{s+1}$

置換表

$\mathcal{L}\{y(t)\}$	X

ここでカルキングの代数方程式の記号解の機能を利用します。
未知数は $\mathcal{L}\{y(t)\}$ なので、カルキングの置換機能を使ってXに置き換えます。
方程式は　$sX-3+2X=\frac{1}{s+1}$

この方程式を未知数Xで、記号解を指定して解きます。(「実行」－「方程式」－「一元多項式」)

$\boxed{X=\frac{3s+4}{s^2+3s+2}}$　　(方程式の記号解)　　この式の右辺に対して「部分分数分解」を行います。

$\boxed{\text{partial\_fract\_decompose}\left(\frac{3s+4}{s^2+3s+2}\right)=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}}$

従って　$\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}$　　この式に対して逆ラプラス変換を行います。

$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y(t)\}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}\right\}$　　従って　$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}\right\}$

$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}\right\}=2e^{-2t}+e^{-t}}$　　逆ラプラス変換の実行(代数計算)

得られた最終解　$y(t)=2e^{-2t}+e^{-t}$