＜交差する円筒の交線の長さ＞

2つの円筒(C_a, C_b)があり、図1のように交差し、b ＞ a とする。
円筒C_aの半径をa, 円筒C_bの半径をbとし、
このとき、C_aがC_bに交差する曲線と長さを表示せよ。

交差する曲線を媒介変数で表すと以下のようになる。

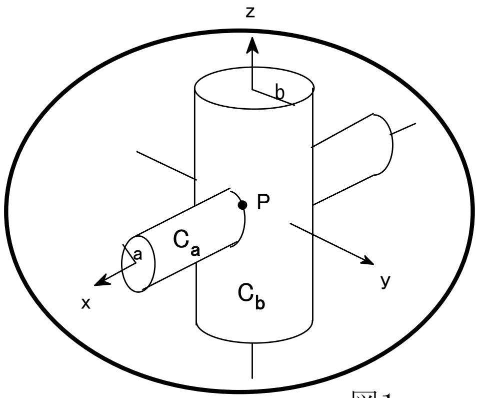


図1

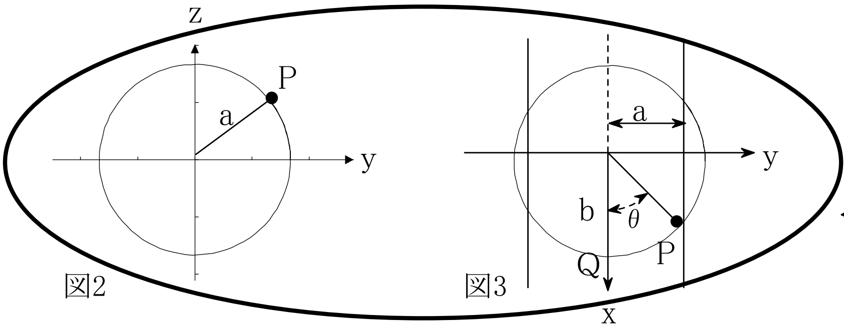


図2　図3

作図機能で作成

境界線の任意の一点の座標を、x, y, zとする。

図2より　$y^2+z^2=a^2$　　パラメータtを用いると　　$y=a\cos t$　　(1)

図3より　$x^2+y^2=b^2$　　(2)　　$z=a\sin t$

式(1)を式(2)に用いると　　$x^2=b^2-a^2\cos^2 t$

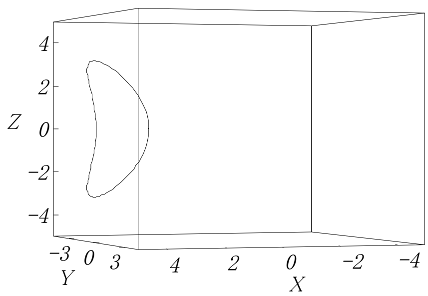
したがって

$x(t)=\sqrt{b^2-a^2\cos^2 t}$

$y(t)=a\cos t$

$z(t)=a\sin t$

3Dグラフは右のようになる



a=3　　b=5　　のときの長さは以下の式で求められる。

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}dt=19.36$$　小数点以下2桁精度指定

代数計算を使った検算

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2=\frac{a^4\cos^4 t-a^2b^2}{a^2\cos^2 t-b^2}\qquad\sqrt{\frac{a^4\cos^4 t-a^2b^2}{a^2\cos^2 t-b^2}}=|a|\sqrt{\frac{a^2\cos^4 t-b^2}{a^2\cos^2 t-b^2}}$$

a>0なので　$$\int_0^{2\pi}a\sqrt{\frac{a^2\cos^4 t-b^2}{a^2\cos^2 t-b^2}}dt=19.36$$　小数点以下2桁精度指定

a=3cm　　b=5cm　　のとき

$$\int_0^{2\pi}a\sqrt{\frac{-a^2\cos^4 t+b^2}{-a^2\cos^2 t+b^2}}dt=19.3627227123874\text{cm}$$

定積分値の中での
自動単位計算