〈モーレーの三角形の作図〉

ここでは、**任意**の三角形の内角の3等分線の交点を頂点とする三角形DEF(モーレーの三角形)の描画のためのデータ生成プログラムの作成とこのプログラムで計算された座標をもとに**モーレーの三角形**のデーターグラフを作成します。

注 モーレーの定理

　　三角形DEFは正三角形である。

但し、三角形の頂点A, B, Cの座標は次のようにします。

A=(0,0)　B=(5,0)　C=(2,3)

注 Aを座標軸の原点としたり、$\overrightarrow{AB}$をx軸上に置く必要ない。

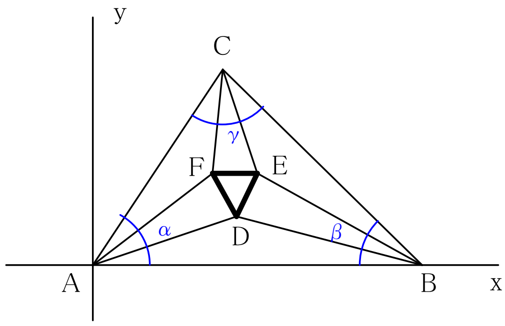


図1　モーレーの三角形

作図機能で作成された概略図

【目標】これらの値から点D,E,Fの座標を求める。

これらの座標が求まれば、作図は可能になります！

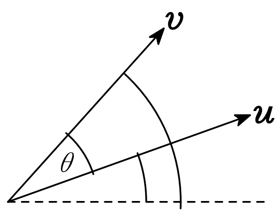
【準備】arg関数とangle関数を準備します。

●ベクトル$\boldsymbol{u}$の偏角を求める　$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$はそれぞれ$\boldsymbol{u}$のx座標、y座標である。

arg($\boldsymbol{u}$)=calking_arg($\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$)　関数定義

システム関数calking_arg関数の簡略版を作った。

●2つのベクトル$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$の挟角 θを求める。

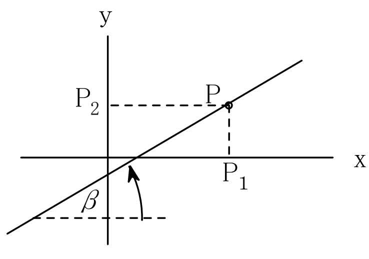


angle($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$) = |arg($\boldsymbol{v}$)−arg($\boldsymbol{u}$)|　関数定義

従って

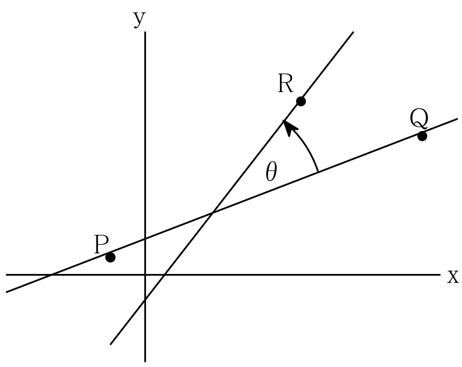
θ = angle($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$)

●傾きがβでかつ点Pを通る直線の方程式は以下である



$y = \tan(\beta)(x-P_1)+P_2$　P_1,P_2はそれぞれPのx座標、y座標である。

●点Pと点Qを通る直線と挟角がθでかつ点Rを通る直線の方程式は以下である。

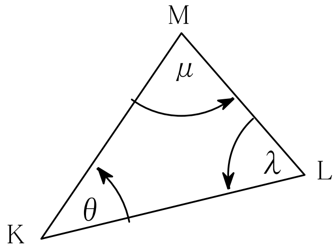


$y=\tan(\arg(Q-P)+\theta)\times(x-R_1)+R_2$

注　θは時計回りの時は負の値である。

●三角形ABCの各頂点の角度を求める関数　頂点K, L, Mの角度を計算する。

```
Angle_of_triangle(K,L,M)
var  θ , λ , μ
 θ = angle(M−K ,L−K)
 λ = angle(K−L ,M−L)
 μ = angle( L−M ,K−M)
return { θ , λ , μ }
```



【6個の直線の式】

∠A, ∠B, ∠Cの角度をそれぞれ α , β , γ とする。

頂点A,B,Cとモーレーの三角形の頂点D,E,Fを結ぶ6個の各直線は次式で表されます。

AD:　$y=\tan(\arg(B-A)+\alpha/3)\times(x-A_1)+A_2$　(1)

BD:　$y=\tan(\arg(A-B)-\beta/3)\times(x-B_1)+B_2$　(2)

BE:　$y=\tan(\arg(C-B)+\beta/3)\times(x-B_1)+B_2$　(3)

CE:　$y=\tan(\arg(B-C)-\gamma/3)\times(x-C_1)+C_2$　(4)

CF:　$y=\tan(\arg(A-C)+\gamma/3)\times(x-C_1)+C_2$　(5)

AF:　$y=\tan(\arg(C-A)-\alpha/3)\times(x-A_1)+A_2$　(6)

式番号はカルキングの式番号定義で作成されたものです。

(1)式の $\tan(\arg(B-A)+\alpha/3)$ は直線の勾配を表しています。 他も同様です。

これらの直線の交点は未知数をx,yとして連立方程式で解けます。解く前に、arg関数、tan関数部分を、数値化する関数を以下のように作っておきます。具体的な計算例を1つ示します。

```
EQ(P,Q, θ )
var  p1,p2,t
{p1,p2}={P_1,P_2}
t=tan(arg(Q−P)+ θ )
return "y=≪t≫(x−≪p1≫)+≪p2≫"
```

EQ関数に計算例

{P,Q, θ }={(0,0),(5,0),0.276}　代入定義

以下のように直線の式が簡素化されたものが得られます。

但し直線の式は文字列形式で求まります。

EQ(P,Q, θ) = "y=0.283228528317068(x−0)+0"

【点D、E, F の座標を求めるスクリプト】

今までの準備によって、以下のスクリプトを書き下すことができます。

```
Morely(A,B,C)
var  AD,BD,BE,CE,CF,AF
var  α , β , γ D,E,F
{ α , β , γ } = Angle_of_triangle(A,B,C)
AD = EQ(A,B, α /3)
BD = EQ(B,A,− β /3)
D = solve_string({{AD,BD},{"x","y"},0})
BE = EQ(B,C, β /3)
CE = EQ(C,B,− γ /3)
E = solve_string({{BE,CE},{"x","y"},0})
CF = EQ(C,A, γ /3)
AF = EQ(A,C,− α /3)
F = solve_string({{CF,AF},{"x","y"},0})
return {D,E,F}
```

solve_string関数は文字列形式の二つの直線の式を、未知数をx,yとして解き、解を配列形式で与えます。

【計算】

A=(0,0)　　B=(5,0)　　C=(2,3)　　　それぞれ三つの代入定義

{D,E,F} = Morely(A,B,C)　　　　代入定義

【図示】

各点の座標が求められたので、左のSheet1の表を準備します。

表の全セルを選択して、[実行]-[2Dグラフ]-[データ型[X-Y軸]]を
実行すると、下の図を得ます。

表Tは単に、理解の助けのために追加した表です。

これはSheet1の各変数の値を数値化しただけのものです。

この方法

(1)13行2列の表Tを作成する。

(2)次の式を実行する。範囲変数 i , j を使った代入定義を利用しています。

i=1..2　　j=1..13

$T_{i,j}$ = $Sheet1_{i,j}$　　　小数点下3桁で代入定義

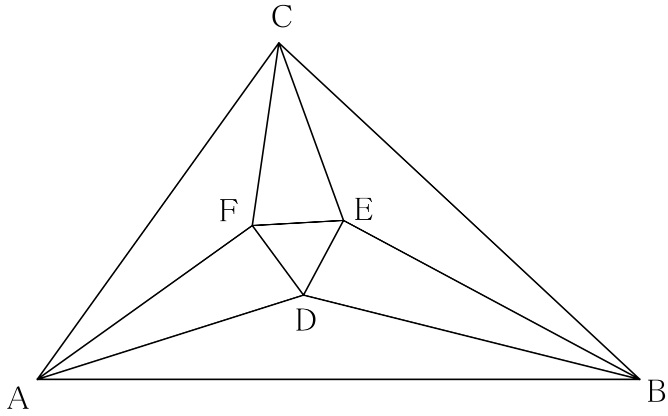
Sheet1

A_1	A_2
B_1	B_2
D_1	D_2
E_1	E_2
B_1	B_2
C_1	C_2
E_1	E_2
F_1	F_2
C_1	C_2
A_1	A_2
F_1	F_2
D_1	D_2
A_1	A_2

T

0	0
5.000	0
2.204	0.749
2.536	1.423
5.000	0
2.000	3.000
2.536	1.423
1.787	1.373
2.000	3.000
0	0
1.787	1.373
2.204	0.749
0	0

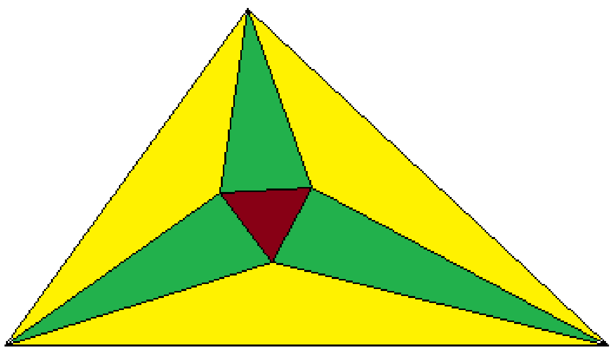
表形式の座標データ



●三角形DEFの各辺の長さを計算します。

{‖D−E‖,‖E−F‖,‖F−D‖} = {2, 2, 2}

●下記の図はWindowsの**ペイント**に貼り付けて、色付けしたものです。



例2　直角三角形

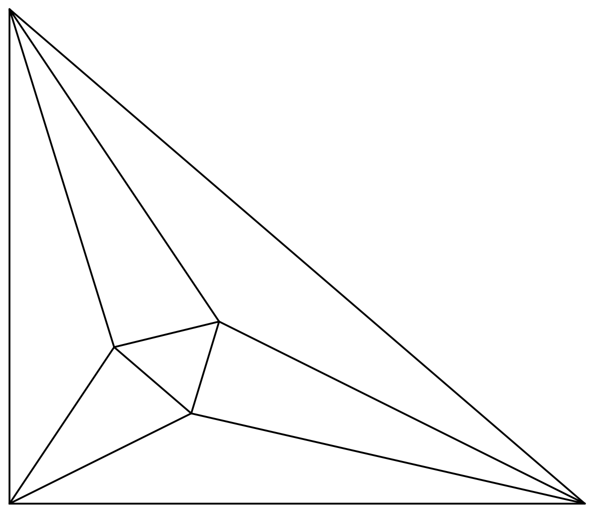
A = (0,0)　　　B = (5,0)　　　C = (0,5)　　それぞれ三つの代入定義

Sheet2

A_1	A_2
B_1	B_2
D_1	D_2
E_1	E_2
B_1	B_2
C_1	C_2
E_1	E_2
F_1	F_2
C_1	C_2
A_1	A_2
F_1	F_2
D_1	D_2
A_1	A_2

【計算】

{D,E,F} = Morely(A,B,C)　　　　　代入定義



表形式の座標データ

例 平べったい三角形

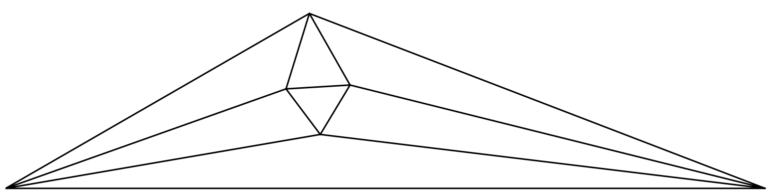
A = (0,0)　　　B = (15,0)　　　C = (6,4)　　それぞれ三つの代入定義

Sheet3

A_1	A_2
B_1	B_2
D_1	D_2
E_1	E_2
B_1	B_2
C_1	C_2
E_1	E_2
F_1	F_2
C_1	C_2
A_1	A_2
F_1	F_2
D_1	D_2
A_1	A_2

【計算】

{D,E,F} = Morely(A,B,C)　　　　　代入定義



表形式の座標データ

●データをEXCELに貼り付けて描画

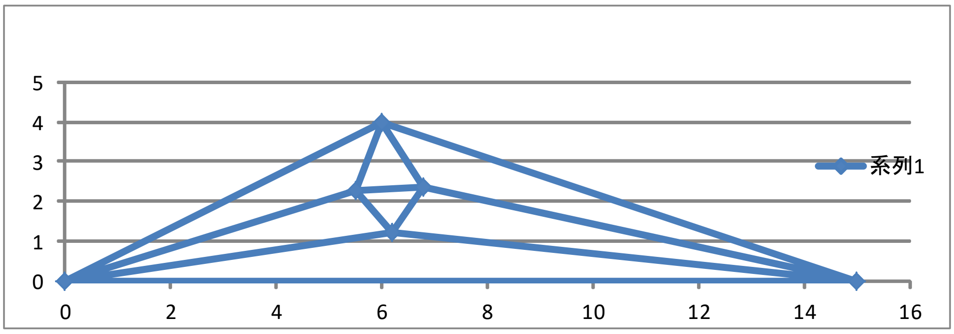
カルキングでは各点の座標を変数名の形で表にまとめていましたが、EXCELで描画するには、数値データに変換する必要があります。

先ほど述べた方法で、数値データの表を作成します。
これが表T1です。

T1

0	0
15	0
6.21119	1.23323
6.77639	2.3542
15	0
6	4
6.77639	2.3542
5.523	2.28319
6	4
0	0
5.523	2.28319
6.21119	1.23323
0	0

表T1の数値データをEXCELに貼り付け、グラフ表示をし、
これをカルキングに貼り付け直したものが以下の図になります。



EXCELで描画した図