

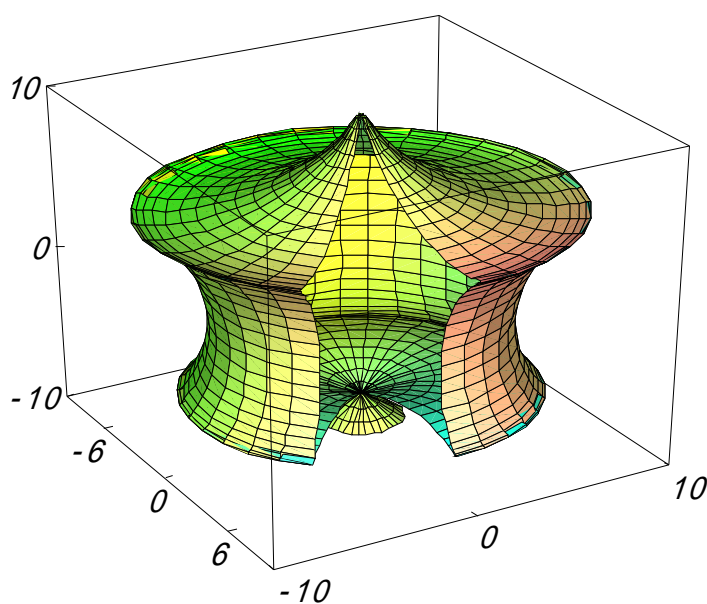
数式処理/ドキュメント作成ソフト
作図/数式計算/文書/表/LaTeX/HTML変換

カルキングPro

(印刷サンプル)

Windows 7 / Vista / XP 対応版

科学/技術/教育研究/統計



株式会社 シンプレックス

<http://www.simplex-soft.com>

上記 HP より体験版がダウンロードできます。

コンデンサの過渡現象とラプラス変換

「Pro」で作成

起電力E、抵抗R、自己インダクタンスL、静電容量Cの
右の回路の過渡現象を解いてみましょう。

キルヒホッフの法則から回路方程式は以下の
ようになります。

コンデンサにたまっている電荷量を $Q(t)$ とします。

電流と電荷の関係から

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

従って抵抗での電圧降下は以下のようになります。

$$RI = R \frac{dQ(t)}{dt}$$

自己インダクタンスでの電圧降下は以下のようになります。

$$L \frac{dI(t)}{dt} = L \frac{d^2Q(t)}{dt^2}$$

コンデンサでの電圧降下は $\frac{Q(t)}{C}$ です。

従って以下の方程式が得られます。

$$E = R \frac{dQ(t)}{dt} + L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{Q(t)}{C}$$

ここでコンデンサでの時刻 $t=0$ での容量は0とします。

初期条件 $Q(0)=0$ $Q'(0)=0$

Laplace変換技法を使ってこの微分方程式を解いてみましょう。

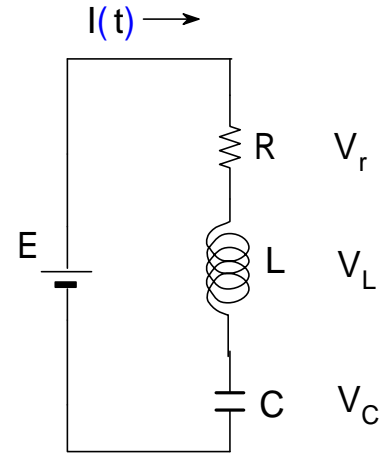
$Q(t)=\emptyset$

関数定義

$$R \mathcal{L} \left\{ \frac{dQ(t)}{dt} \right\} = R \frac{d}{dt} \mathcal{L} \{ Q(t) \} = R (s \mathcal{L} \{ Q(t) \} - Q(0)) = R s \mathcal{L} \{ Q(t) \}$$

$$L \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \right\} = L \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{L} \{ Q(t) \} = L (s^2 \mathcal{L} \{ Q(t) \} - (sQ(0) + Q'(0))) = L s^2 \mathcal{L} \{ Q(t) \}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{Q(t)}{C} \right\} = \frac{1}{C} \mathcal{L} \{ Q(t) \}$$



$$R=50[\quad]$$

$$L=0.65[\text{H}]$$

$$C=22[\mu\text{F}]$$

$$E=5[\text{V}]$$

$$\mathcal{L}\{E\} = \frac{E}{s}$$

従って

$$Rs\mathcal{L}\{Q(t)\} + Ls^2\mathcal{L}\{Q(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q(t)\} = \frac{E}{s}$$

この式を $\mathcal{L}\{Q(t)\}$ で解く

方法 $\mathcal{L}\{Q(t)\}$ をTと置く

$$RsT + Ls^2T + \frac{1}{C}T = \frac{E}{s}$$

これをカルキングの方程式(一元多項式の記号解)で解くと以下になる。

$$T = \frac{1}{Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}} \frac{E}{s} = \frac{CE}{CLs^3 + CRs^2 + s}$$

従って

$$\mathcal{L}\{Q(t)\} = \frac{CE}{CLs^3 + CRs^2 + s}$$

この両辺に逆Laplace変換すると

$$Q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{CE}{CLs^3 + CRs^2 + s}\right\} \quad \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{Q(t)\}\} = Q(t) \quad \text{だから}$$

ここで記号式のままで逆Laplace変換は求まりません。ここでは以下の値で解いてみます。

$$R=50[\quad]$$

$$L=0.65[\text{H}]$$

$$C=22[\mu\text{F}]$$

$$E=5[\text{V}]$$

しかし単位が付いたままでは解けません。そのため標準単位で求め無単位化する。

Cの部分は以下のようにしてF単位にできます。

$$C=22[\mu\text{F}] \quad \text{これをいったん代入します。}$$

$$C=[\text{F}] \quad \text{このようにして単位を指定して計算します。}$$

$$C=0.000022[\text{F}]$$

このような準備して下記の4つの単位部を除いた式を「代数代入」する。

代入定義(数値モード)ではなく代数代入するのは、後で代数計算で参照するためです。

R=50

L=0.65

C=0.000022

E=5

この値を使って

$$\frac{CE}{CLs^3+CRs^2+s} = \frac{0.00011}{0.0000143s^3+0.0011s^2+s}$$

代数計算

以下の記号処理(代数計算、代数代入)での計算精度は6桁にしています。

逆Laplace変換を求めるに先だて必ず部分分数分解をする必要があります。

$$\text{partial_fract_decompose}\left(\frac{0.00011}{0.0000143s^3+0.0011s^2+s}\right) = \frac{-0.00011s-0.00846154}{s^2+76.9231s+69930.1} + \frac{0.00011}{s}$$

プロパティ
代数計算
精度6桁

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.00011}{s} + \frac{-0.00011s-0.00846154}{s^2+76.9231s+69930.1}\right\} \\ & = 0.00011 - 0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t) - 0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t) \\ & = -0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t) - 0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t) + 0.00011 \end{aligned}$$

故に得られた解は以下の通りになる。

$$Q(t) = -0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t) - 0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t) + 0.00011$$

検算

Q(t)を関数定義する。

$$Q(t) = -0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t) - 0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t) + 0.00011$$

初期値の確認

t=0 代入

Q(0)=0 計算

Q'(0)=0 の確認

Qの一階微分の関数を求める

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0.0000000195883e^{-38.4616t}\cos(261.631t) + 0.02940136099512e^{-38.4616t}\sin(261.631t)$$

この関数を使ってt=0での値を求める。

$$0.0000000195883e^{-38.4616t}\cos(261.631t) + 0.02940136099512e^{-38.4616t}\sin(261.631t) = 0.0000000195883$$

微分方程式の検算

$$R\frac{dQ(t)}{dt} + L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{Q(t)}{C} - E = 0.000000350741e^{-38.4616t}\cos(261.631t) - 0.00000230055e^{-38.4616t}\sin(261.631t)$$

有効桁数6桁で解いているので少し誤差が出ます。

< 高精度システム関数 > 「Pro」で作成

三角関数、指数計算、ベッセル関数、積分関数等を高精度で計算できます。

カルキングのライブラリファイルでの実行のため、1回目の実行時にファイルのオープンが必要となり、20桁精度くらいでも少し時間がかかります。

2回目以降は計算時間のみですので、指定された精度による計算時間となります。

三角関数

$\sin 1.2 = 0.9320390859672263496701344354948259954150705882087307353665978$
944502423415767920542157417224381184959624520224612545817096897563647
461506673942640388109579314371616639738436244547639883546898824108774
382629750864159214083332477074169521019125387543629648463688033726533
019558334136663337112572155360318138975943620099692549080155984812397
736732531775064490463208007467877782895209559452099808278738955738869
566407546859688023352191725487636161533819069618331177094951334106072
90595764235775528103728

500桁指定

$\sin(2+3i) = 9.15449914691142957346729954460983255915886056876518297789983$
 $- 4.16890695996656435075481305885375484357356560475805588996548i$

60桁指定

$\sin^{-1}(3+2i) = 0.9646585044076027920454110594995323555197773725073316527132$
 $58 + 1.96863792579309629178866509524549818952073101268201057384281i$

60桁指定

双曲線関数

$\sinh 0.5 = 0.521095305493747361622425626411491559105928982611480527946094$

60桁指定

$\cosh(0.6+0.4i) = 1.091885772270070189341237291649321222433558957906901131$
 $15581 + 0.247924582585032355168041350116475352493531571686503313308213i$

60桁指定

$\sinh^{-1}(3-2i) = 1.983387029916535432347076902894039565014248302909345356125$
 $27 - 0.570652784321099400710283879685669650182803245096040136530273i$

60桁指定

対数関数

$$\log 5i = 0.698970004336018804786261105275506973231810118537891458689573 + 0.682188176920920673742891812715677885105063741861962699950427i$$

60桁指定

$$\ln(11 \times 10^{5000}) = 11515.3233602430267906340192169997861673053291499978022973419$$

60桁指定

累乗計算

$$(\sqrt{7})^{4.123i} = -0.644902121935772854970261462754260788190492876863423566641853 - 0.764265171993816266846186278154460938605858659860978192246686i$$

60桁指定

複素数演算関数

$$\arg(2.1 + 4.3i) = 1.11649424010158040455999963357682026651786267444001651804088$$

60桁指定

積分関数

$$\text{Si}(5) = 1.54993124494467413727440840073063901218318489396637221047797$$

60桁指定

$$\text{Si}(1-i) = 1.10422265823558173955875396985016752952141412189466524794171 - 0.882453805007917743376124044694948448420273067530323262705879i$$

60桁指定

$$\text{C}(5) = -0.190029749656643878618458900116300806496739156101856628912812$$

60桁指定

$$\text{C}(1-i) = 0.882172180555936325050614116656289517588031344138108191880297 - 0.287249133519955939527283572386122907212664976140407050801261i$$

60桁指定

$$\text{E}_2(5) = 0.000996469042708838109983238574049813867519107673865751606078061$$

60桁指定

$$E_3(0.2-3i)=-0.139383591251705067033110458563231968441078501273147718319929 - 0.125661382929482385164191535362644659660359569110597735047308i$$

60桁指定

ベッセル関数

ベッセル関数は現在のところ最高精度は350桁程度となっています。

以下の計算精度は50桁です。

$$J_{2.5}(3.09)=0.42404095708346614898163077518321990582735778536036$$

$$J_5(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)=-0.044776521185492601345775728206910671728074622999583 + 0.19129728363631391432818558405495553221789080801948i$$

$$Y_{5.2}(12.5)=-0.23558113508182117448112000638411323643764704093649$$

$$Y_4\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)\right)=2.106872654055747060238429428283024821105484528546 + 9.6886971930261505069922356326357643001819827230222i$$

$$H_2^{(1)}(1.55)=0.24452520769893736860441271081891005973103994656705 - 0.89217990797978204998337329864505741671560673703659i$$

$$H_3^{(1)}(1.5i)=1.1674356956361945688359553028609713659741144862615$$

$$I_3(0.378)=0.0011352958852814700376299719828989995441786848533142$$

$$I_5\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)\right)=-0.00095640087685363724939306078900421016798680789029936 + 0.00078117247293383278727054530609307558142225540307584i$$

$$K_2(1.5i)=-1.4642865336968037092662235000700932853911439890759 + 0.36456246289851074165289519734317037599418462074397i$$

$$K_2(1.55)=0.53365574094769624447477004446828890773279776900188$$

注 以下の球ベッセル関数に関して詳しくは「数式計算」の「球ベッセル関数.c1k」を参照のこと

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad \text{関数定義}$$

$$n_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad \text{関数定義}$$

$$j_0(3.5)=-0.10022377933989138517724822858389588145285192455445$$

$$j_2(3.5)=0.30501551189929667967228726485031169734683702852854$$

$$n_0(12.4)=-0.079531637280553514794430704417388045981607154558203$$

$$n_1(12.4)=0.0069413337232061478835595220798331107594344539764572$$

特殊関数

ガンマ関数、ベータ関数、ゼータ関数は現在のところ最高精度は350桁程度となっています。プサイ関数は200桁程度です。以下の計算精度は50桁です。

$$\Gamma(0.5)=1.7724538509055160272981674833411451827975494561224$$

$$\Gamma(1+0.5i)=0.80169409706971722259775631158715424669681704886396 - 0.19963973816459635625222672439859798317876685756929i$$

$$\Gamma(800)=9.6381626416923250518079924721878545074444550227001 \times 10^{1973}$$

$$B(3,5)=0.0095238095238095238095238095238095238095238095238095$$

$$B(3,5i)=-0.0079575596816976127320954907161803713527851458885942 + 0.012201591511936339522546419098143236074270557029178i$$

$$\zeta(5)=1.0369277551433699263313654864570341680570809195019$$

$$\Psi(5)=1.5061176684318004727268212432509309022911739973934$$

多項式関数(ルジャンドル、エルミート、ラゲール、チェビシェフ)は分数モード指定もでき、1000桁精度まで、計算できます。

1次元高速フーリエ変換(FFT)

「Pro」で作成

2の巾乗個の波形実測データをもとに1次元周波数分析を行います

```
f={3, 9.10949732073801, 8.04256821819622, 0.380941892044495, -6.69132749216299, -6.73491980695517, -0.595938306693562, 4.70968260727719, 3.53553390593273, -2.43145003571863, -6.0851356747581, -2.63559027698414, 5.0677391917244, 9.31745398255832, 5.5519308557423, -2.84252728303621, -8, -5.67090770399218, 0.563113181927043, 3.34634562252514, -0.475538003343329, -6.44194998196602, -7.25567760685487, -0.689741972191845, 7.77817459305203, 10.4513246216704, 5.28877337572582, -2.09685708677876, -4.39522689797245, -0.207160949932867, 4.70914682007863, 3.81796973464787, -3.000000000000002, -9.10949732073802, -8.04256821819621, -0.380941892044467, 6.691327492163, 6.73491980695516, 0.595938306693545, -4.70968260727719, -3.53553390593273, 2.43145003571864, 6.0851356747581, 2.63559027698413, -5.06773919172441, -9.31745398255832, -5.55193085574229, 2.84252728303621, 8, 5.67090770399218, -0.56311318192704, -3.34634562252514, 0.475538003343325, 6.44194998196602, 7.25567760685486, 0.689741972191842, -7.77817459305203, -10.4513246216704, -5.28877337572582, 2.09685708677876, 4.39522689797243, 0.207160949932821, -4.70914682007864, -3.81796973464786}
```

このデータをカルキングのデータグラフで表示すると次のようになります。

